REGNECENTRALEN

DANSK INSTITUT FOR MATAMATIKMASKINER

DASK - BIBLIOTEKSSPECIFIKATION

SEKVENS-BETEGNELSE
IG 1
side 1/9

Kodet af P.N. og H.B.H.

Indkørt af P.N. og H.B.H.

Udgivet d. 13.8.1960

$$y = \int_a^b f(x)dx$$

Indhops-adresser	Udhops-adresser	Indgang	Udgang
OA8	107A8	C(OAA) = a C(2AA) = b DASK-tal	$\int_a^b f(x)dx \rightarrow$ FAR C(FMD) og C(FMR) ødelagt

Kodelængde 0 - 113	Undersekvenser FR 1 i OA9 f(x) - sekv. m. indhop i OAB
Begyndelsesadresse lige	Arbejdsceller OAA - 17AA
Grundparametre ingen	Perm. konstanter C(2039), C(2040) C(2041), C(2043)
Programparametre ingen	

OVERSIGT OVER ARBEJDSCELLER IG 1

0AA, 1AA	a	10AA	1 - n (norm. exp.)
2AA, 3AA	b	11AA	g
4AA, 5AA	Q', I'	12AA, 13AA	J'
6AA	Q''', I'''	14AA	J'''
7AA	S'''	15AA	P (= 2↑(-n))
8AA, 9AA	q	16AA, 17AA	S'

Grundlag

Processen baseres paa Simpsons formel (se f. eks. Hildebrand: Introduction to Numerical Analysis, side 73):

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)/6\times[f(a) + 4\times f((a+b)/2) + f(b)] + (b-a)\uparrow 5\ /2880\times f^{IV}(\xi)$$

hvor ξ ligger mellem a og b.

Gennem fortsatte halveringer af intervallet og anvendelse af Simpsons formel paa hvert delinterval faas sukcessive tilnærmelser til integralet ved brug af de vægte, som er vist i følgende skema:

Abscisse	a 0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	b 1
I0 = (b-a)/3×2↑(-1)×	(1				4				1)
I1 = (b-a)/3×2↑(-2)×	(1		4		2		4		1)
I2 = (b-a)/3×2↑(-3)×	(1	4	2	4	2	4	2	4	1)

o.s.v.

Denne proces kan udføres ved følgende iteration, som kun kræver beregning af hver funktionsværdi een gang:

$$J0 = [f(a) + f(b)]/2$$

$$\left.\begin{array}{l} Sn = \sum_{m=0}^{2\uparrow n-1} f[a + (1/2 + m)\times 2\uparrow(-n)\times(b-a)] \\ \\ In = Jn + Sn\times 2\uparrow(1-n) \\ \\ J(n+1) = [In + Jn]/4 \end{array}\right\} \quad n = 0,1,2,--$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)/3\times \lim In \quad \text{for } n \to \infty$$

Fejlen ved den n'te tilnærmelse er givet ved

$$1/16\uparrow n \times (b-a)\uparrow 5/2880 \times f^{IV}(\xi)$$

Tilnærmet kan man derfor regne med, at fejlen reduceres med en faktor 16 for hvert skridt i iterationen.

Funktion

Talrepræsentation

Sekvensen behandler grænserne a og b som DASK-tal, med stop for spild i b - a. Integranden f(x) og integralet behandles som oppakkede flydende tal. Alle melemregningerne udføres med oppakkede flydende tal

Integranden f(x)

Integranden f(x) skal beregnes af en undersekvens med indhop i OAB.

Indgang: C(AR) = x (DASK-tal)
Udgang: f(x) → FAR (flydende tal)

Bemærk:

1. Sekvensen kan frit benytte FMD, FMR, AR og MR i mellemregningerne.
2. Sekvensen maa efterlade C(IRC) uændret.

Konvergenskriterit

1. Det normale test. Sekvensen beregner som første approximation I = (f(a) + f(b))/2 og paabegynder derefter iterationen, der sædvanligvis fortsættes indtil to paa hinanden følgende aproximationer stemmer inden for en fastsat relativ tolerance som i sekvensen udtrykkes saaledes:

$$|(In - I(n-1))/In| \le 2\uparrow(1-v)$$

hvor v findes i sekvensen paa følgende form:

C(113A8) = vA00

Med en valgt værdi af v vil integralet ved skikkelige funktioner faas med en relativ nøjagtighed af

$$2\uparrow(1-v)/15$$

Hvis vi ved b betydende cifre forstaar en relativ nøjagtighed, som er $\le 0.5 \times 10^{-b}$ (d.v.s. b sikre cifre under alle omstændigheder) faas for de nødvendige værdier af v:

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	5	8	12	15	18	22	25	28	32

I sekvensen er v sat til 27, men kan iøvrigt vælges vilkaarligt ved æn - dring af indholdet i hac 113A8.

2. Nær flydende nul.
Hvis In < 2⅄(v-1025) ændres konvergenskravet derhen, at differensen In - I(n-1) skal være flydende nul.

3. Sikkerhedsstop. I visse tilfælde kan man risikere, at iterationerne fortsætter i det uendelige uden at der findes nogen løsning. For at forhindre dette er der i sekvensen indbygget et sikkerhedsstop, hvortil der hoppes, naar

n + 1 > u

hvor n er antallet af iterationer og u er en størrelse, der kan vælges af brugeren. u er lagret paa følgende maade:

C(hac 112A8) = 2⅄(-u)

Hvis man ikke foretager sig noget, har u værdie11, og iterationen stopper da, naar J12 er beregnet, d.v.s. naar intervallet b-a er underinddelt i 2⅄12 = 4096 underintervaller.

Naar maskinen er stoppet paa denne maade, er C(FMD) = In.

Stopsituationer

Der er mulighed for følgende stop:

KR	ASOP	AR	IRB	IRC	IRD	Aarsag
108A8	108A830	spild	-	1	-	b - a danner spild
108A8	108A830	-	-	0	74A8	Der er udført 11 iterationer
46A9	46A930	-	-	-	-	Stop i FR 1 (s.d.)

Ønskes andre forholdsregler i disse situationer, kan passende hopordrer lagres de paagældende steder.

Det bemærkes, a C(110A8) = 3 flydende pakket samt at C(109A8) = 2A00.

Advarsel. Opmærksomheden henledes paa, at ukritisk brug af den foreliggende sekvens kan føre til helt forkerte resultater ved oscillerende funktioner. For eksempel vil en beregning af

8xpi
cos x dx
0

give resultatet 8xpi og ikke 0. Som nogen sikring mod saadanne fejl kan det foreslaas, at man beregner integralet dels i eet stræk fra a til b, dels i to stræk, f. eks. a til a + 4x(b-a)/7 og a + 4x(b-a)/7 til b.

SEKVENS-BETEGNELSE
IG 1
side 6/9

ALGOL-program.

```
procedure Simpson (Integral, v, eps)
          integrand: (f);
          value v, eps; real Integral, v, eps;
          real procedure f;
begin real g, p, t, s, I1, I2, J;
      boolean Gennemløb 1;
      Gennemløb 1:= true; g:= 0; p:= -1;
      S:= f(b); go to A;
B:    Gennemløb 1:= false ;
C:    g:= if p<0 then 0.5 else p/2;
A:    S:= S + f(a + g×(b-a));
      g:= g + p;
      if g≥0 then go to A;
      t:= if Gennemløb 1 then 0.5 else
          if p<0 then 2 else 2↑(1+ln(p)/ln(2));
      if Gennemløb 1 then
begin I1:= J:= S×t;  go to B end;
      I2:= J + S×t;
      if (I2 - I1)/I2 < 1/2↑v then
begin Integral:= I2×(b-a)/3; go to HOPUD end ;
      J:= (J + I2)/4;
      I1:= I2;
      p:= if p<0 then 0.5 else p/2;
      if p<eps then go to STOP else go to C;
HOP UD:  end Simpson
```

SEKVENS-BETEGNELSE
IG 1
side 7/9

Indhop ->	0	105 A8 54	
	1	106 A8 74	opbevar C(IR)
	2	1 A 55	c:= 1
	3	2 AA 40	
	4	0 AA 01	q:= b - a
	5	8 AA 08	
108 ->	6	108 A8 12	hop paa spild
	7	2 AA 40	
	8	0 AB 16	f(b) ->FAR
	9	11 AA 68	g:= 0
	10	2040 A 60	
	11	15 AA 28	p:= -1
19<-	12	19 A8 10	hop
84 ->	13	0 A 55	c:= 0
90 ->	14	15 AA 60	
	15	1 A 0F	g:= p/2
	16	11 AA 28	
	17	2000 A 48	
	18	2003 A 68	0 -> FAR
34, 12 ->	19	2000 A 40	
	20	16 AA 08	
	21	2003 A 60	opbevar S (1. gang f(b))
	22	7 AA 28	
	23	11 AA 64	
	24	8 AA 0A	f(a + g×q) -> FAR
	25	0 AA 00	
	26	0 AB 16	
	27	16 AA 40	
	28	1996 A 08	
	29	7 AA 60	S + f(a + g×q) ->FAR
	30	1999 A 28	(1. gang f(a) + f(b))
	31	2 A9 16	
	32	15 AA 60	
	33	11 AA 26	g:= g + p
19<-	34	19 A8 11	hop hvis g≥0 (til summation)
	35	2039 A 61	-1 -> ARvadr.
43<-	36	43 A8 53	hop "første gang"
	37	15 AA 60	
42<-	38	42 A8 51	hop hvis p<0
	39	10 AA 0E	

SEKVENS-BETEGNELSE
IG 1
side 8/9

```
             40     10 AA 61   1 - n - ARvadr.
43 <-        41     43 A8 10   hop
38 ->        42   2039 A  60   1 - ARvadr.
36, 41 ->    43     32 A9 16   Sx2↑(1-n) - FAR
76 <-        44     76 A8 53   hop "første gang"
             45     12 AA 40
             46   1996 A  08
             47     14 AA 60   In -> FMD
             48   1999 A  28
             49      0 A9 16   In = Jn + 2↑(1-n)xS -> FMD
             50      4 AA 41
             51   2036 A  16
             52   2000 A  08   -I(n-1) -> FAR
             53      6 AA 60
             54   2003 A  28
             55   1996 A  40
             56      4 AA 08
             57   1999 A  60   In:= Jn + Sx2↑(1-n)
             58      6 AA 28
             59      2 A9 16   d = In - I(n-1) -> FAR
             60      6 AA 60
             61    113 A8 21   In" + 1024 - v -> AR
66 <-        62     66 A8 51   hop hvis In nær flydende nul
             63   2003 A  21   I" - v - d" -> AR
91 <-        64     91 A8 11   hop hvis d" - In" ≤ -v (konv. i orden)
68 <-        65     68 A8 10   hop til ny iteration
62 ->        66   2000 A  43
91 <-        67     91 A8 11   hop hvis d = 0 (konv. i orden)
66 ->        68     12 AA 40
             69   2000 A  08
             70     14 AA 60   In -> FAR
             71   2003 A  28
             72      2 A9 16   In + Jn -> FAR
             73    109 A8 61
             74     32 A9 16   (In + Jn)/4 -> FAR
80 <-        75     80 A8 10   hop
44 ->        76   2000 A  40
             77      4 AA 08
             78   2003 A  60   IO:= (f(a)+f(b))/2
             79      6 AA 28
```

SEKVENS-BETEGNELSE
IG 1
side 9/9

75 ->	80	2000	A	40	
	81	12	AA	08	I(n+1):=(In+Jn)/4
	82	2003	A	60	
	83	14	AA	28	
13<-	84	13	A8	53	hop "første gang"
	85	15	AA	60	
	86	1	A	0F	p:= p/2
	87	15	AA	28	
	88	112	A8	21	
108<-	89	108	A8	51	hop hvis p<2↑(-u)
14<-	90	14	A8	10	hop til ny iteration
67, 64 ->	91	8	AA	40	
	92	2003	A	0E	
	93	2000	A	08	
	94	2003	A	61	q = b - a ->FAR
	95	2043	A	20	
	96	2003	A	28	
	97	1996	A	40	
	98	2004	A	08	
	99	1999	A	60	In ->FMR
	100	2007	A	28	
	101	110	A8	40	
	102	2021	A	16	3 ->FMD
	103	57	A9	16	b
	104	50	A9	16	∫f(x)dx = q×In/3 - FAR
(0)	105	(0)	A	55	a
(1)	106	(0)	A	75	retabler IR
Udhop<-	107	1	D	10	hop ud
6, 89 ->	108	108	A8	30	alarmstop
	109	2	A	00	2×2↑(-11)
	110	1536	A	00	
	111	1026	A	00	3 flydende pakket
	112	1	A	00	2↑(-u)
	113	27	A	00	v